第 2 节 距离公式（★★）

内容提要

1．两点间的距离公式：设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，则 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

2．点到直线的距离公式：设点 $P(x_0,y_0)$，直线 $l:Ax+By+C=0$，则点 P 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

3．平行线间的距离公式：设 $l_1:Ax+By+C_1=0$， $l_2:Ax+By+C_2=0$， $C_1\neq C_2$，则 l_1 和 l_2 平行，且它们之间的距离 $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

4．弦长公式：设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，若 A，B 在直线 $y=kx+b$ 上，则 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|$；若 A，B 在直线 $x=my+t$ 上，则 $|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot|y_1-y_2|$.

典型例题

类型Ⅰ：两点间的距离

【例 1】设 P 为函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 的图象上一点，O 为坐标原点，则 $|OP|$ 的最小值是（　　）

（A）2　　（B）$\sqrt{5}$　　（C）$2\sqrt{2}+2$　　（D）$\sqrt{2\sqrt{2}+2}$

解析：有解析式，可用它设动点 P 的坐标，再由两点间距离公式计算 $|OP|$，

由题意，可设 $P(x,x+\dfrac{1}{x})$，则 $|OP|=\sqrt{x^2+(x+\dfrac{1}{x})^2}=\sqrt{2x^2+\dfrac{1}{x^2}+2}\geq\sqrt{2\sqrt{2x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}}+2}=\sqrt{2\sqrt{2}+2}$，

当且仅当 $2x^2=\dfrac{1}{x^2}$，即 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ 时等号成立，所以 $|OP|_{\min}=\sqrt{2\sqrt{2}+2}$.

答案：D

【例 2】若 x，y 满足 $3x+4y-13=0$，则 $(x-1)^2+y^2$ 的最小值为（　　）

（A）3　　（B）4　　（C）2　　（D）6

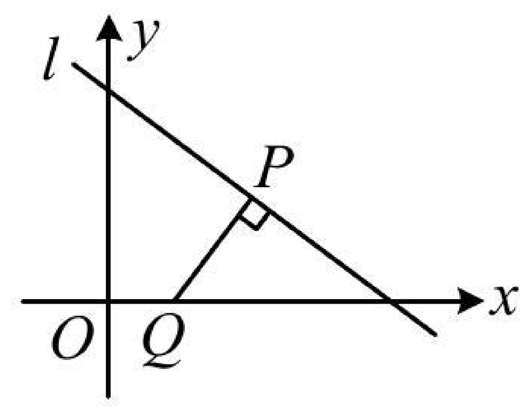
解析：由 $(x-1)^2+y^2$ 的结构联想到两点间的距离公式，记 $P(x,y)$， $Q(1,0)$，则 $(x-1)^2+y^2=|PQ|^2$，

因为 $3x+4y-13=0$，所以 P 是直线 $l:3x+4y-13=0$ 上的动点，

如图，当 $PQ\perp l$ 时，$|PQ|$ 最小，故可用点到直线的距离公式求该最小值，

所以 $|PQ|_{\min}=\dfrac{|3\times1+4\times0-13|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$，故 $(x-1)^2+y^2$ 的最小值为 4.

答案：B



【反思】解析几何中看到“平方＋平方”的结构，常往两点间的距离这个方向思考.

类型Ⅱ：点到直线的距离

【例 3】已知 $A(-2,0)$，$B(4,a)$ 两点到直线 $l:3x-4y+1=0$ 的距离相等，则 $a=$（　　）

（A）2　（B）$\dfrac{9}{2}$　（C）2 或 -8　（D）2 或 $\dfrac{9}{2}$

解析：由题意，$\dfrac{|3\times(-2)-4\times0+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|3\times4-4\times a+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$，解得：$a=2$ 或 $\dfrac{9}{2}$.

答案：D

【变式】已知直线 $l:y=k(x-2)+2$，当 k 变化时，点 $P(-1,2)$ 到直线 l 的距离的取值范围是（　　）

（A）$[0,+\infty)$　（B）$[0,2]$　（C）$[0,3]$　（D）$[0,3)$

解法 1：有点的坐标和直线的方程，可把点 P 到直线 l 的距离用 k 表示，再分析它的取值范围，

$y=k(x-2)+2\Rightarrow kx-y+2-2k=0\Rightarrow$ 点 P 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|-k-2+2-2k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\dfrac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}}$

$=3\sqrt{\dfrac{k^2}{k^2+1}}=3\sqrt{\dfrac{k^2+1-1}{k^2+1}}=3\sqrt{1-\dfrac{1}{k^2+1}}$，

因为 $k^2\ge0$，所以 $k^2+1\ge1$，从而 $0<\dfrac{1}{k^2+1}\le1$，故 $0\le1-\dfrac{1}{k^2+1}<1$，所以 $0\le3\sqrt{1-\dfrac{1}{k^2+1}}<3$，故 $d\in[0,3)$.

解法 2：观察发现直线 l 过定点，故也可尝试画图分析，先在图中把目标距离作出来，

$y=k(x-2)+2\Rightarrow$ 直线 l 过定点 $Q(2,2)$，如图，作 $PA\perp l$ 于 A，

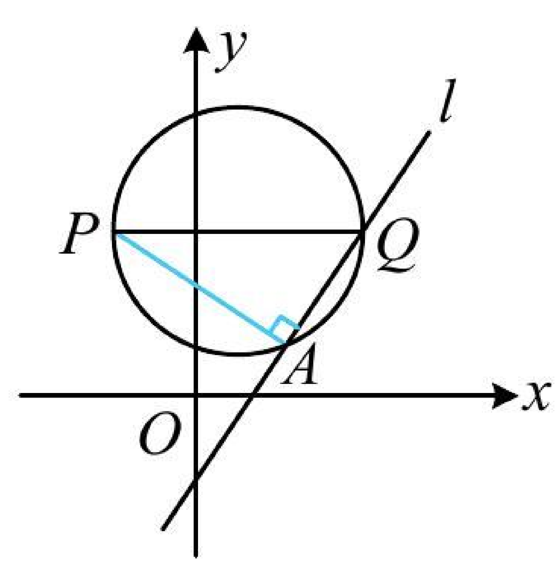
我们就是要分析 $|PA|$ 的取值范围，因为 P 是定点，所以找 A 的轨迹，

注意到当 l 绕点 Q 旋转的过程中，始终有 $PA\perp AQ$，所以点 A 在以 PQ 为直径的圆上运动，

由于直线 l 的斜率存在，所以 A 不与 Q 重合，那么 A 在圆上运动时，有 $0\le|PA|<|PQ|=3$，

故点 P 到直线 l 的距离的取值范围是 $[0,3)$.

答案：D



类型Ⅲ：平行线间的距离

【例 4】直线$2x+y+1=0$与直线$4x+2y+a=0$之间的距离为$\sqrt{5}$，则$a=$_____.

解析：两平行线才能算距离，两直线的斜率均为-2，所以平行，代公式前先调整系数为一致，

$2x+y+1=0\Rightarrow 4x+2y+2=0$，所以两直线的距离$d=\dfrac{|2-a|}{\sqrt{4^2+2^2}}=\sqrt{5}$，解得：$a=-8$或 12.

答案：-8或 12

强化训练

1.（★）若直线$l_1:x+my+1=0$和直线$l_2:2x-y-1=0$平行，则它们之间的距离为_____.

2.（2023 • 江苏南京模拟 • ★★）（多选）已知直线$l_1:2x+y-6=0$和点$A(1,-1)$，过点A作直线l_2与直线l_1相交于点B，且$|AB|=5$，则直线l_2的方程为（　　）

（A）$x=1$　（B）$y=-1$　（C）$3x+4y+1=0$　（D）$4x+3y-1=0$

3.（★★）已知$A(1,1)$，$B(4,3)$，$C(-2,0)$，则ΔABC的面积为_____.

4.（★★）经过原点O，且与$A(1,2)$和$B(-2,4)$两点距离相等的直线l的方程为_____.

5.（★★）设直线 $l:3x-4y+2m=0$ 与直线 $l':6x-my+1=0$ 平行，则点 $A(a^2,3a)$ 到 l 的距离的最小值为（　　）

（A）$\frac{4}{5}$　　（B）1　　（C）$\frac{6}{5}$　　（D）$\frac{7}{5}$

6.（2023 •四川模拟 •★★★）正方形 $ABCD$ 的中心为点 $P(1,0)$，边 AB 所在的直线的方程为 $2x-y+2=0$，则边 CD 所在直线的方程为_____.

7.（2020 • 新课标III卷 • ★★★）点 $(0,-1)$ 到直线 $y=k(x+1)$ 的距离的最大值为（　　）

（A）1　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）$\sqrt{3}$　　（D）2

8.（★★★）已知实数 x，y 满足 $x^2+y^2=1$，则 $|x+y+2|$ 的取值范围是_____.